MATRICES

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc...

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos.

- ## CONCEPTO DE MATRIZ

Una matriz es un conjunto de elementos de cualquier naturaleza aunque, en general, son números ordenados en filas y columnas.

Se llama **matriz** *de orden "$m \times n$" a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo m y n números naturales.*

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, etc., y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, etc., Un elemento genérico que ocupe la fila i y la columna j se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz: A = (a_{ij})

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$Ej. \quad A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -3 & 5 \\ 7 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{donde sus filas son: } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -3 & 5 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{y sus columnas } \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cuando nos referimos indistintamente a filas o columnas hablamos de líneas.
El número total de elementos de una matriz $A_{m\times n}$ es $m \cdot n$
En matemáticas, tanto las **Listas** como las **Tablas** reciben el nombre genérico de matrices.

- ## Vectores fila y columna

Es conveniente considerar a la matriz como un arreglo de vectores más que como un arreglo de elementos. Así podremos usar las propiedades ya demostradas de vectores.

En una matriz A = $(a_{ij})_{m\times n}$ definimos A_i el vector fila *i* como la matriz de orden *1xn*

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ y el vector columna *i* como la matriz de *mx1* $A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ . \\ . \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

Hay *m* vectores fila de dimensión *n* y *n* vectores columna de dimensión *m*

En la matriz A_{2x3} del ejemplo anterior podemos hablar de 2 vectores fila de dimensión 3, denotados A_1, A_2 y 3 vectores columna de dimensión 2, denotados A^1, A^2, A^3

- ## MATRICES IGUALES

Dos matrices A = $(a_{ij})_{m\times n}$ y B = $(b_{ij})_{p\times q}$ son iguales sí y solo si tienen en los mismos lugares elementos iguales, es decir : $m = p\ ,\ n = q\ ;\ a_{ij} = b_{ij}\ \ \forall i, \forall j$

- ## ALGUNOS TIPOS DE MATRICES

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma, sus elementos, etc., reciben nombres diferentes:

Tipo de matriz	*Definición*	*Ejemplo*
RECTANGULAR	*Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden* $m\times n$, $m \neq n$	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
TRANSPUESTA	*Dada una matriz* A, *se llama transpuesta de* A *a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por* A^t ó A^T	*Si es* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *su traspuesta es* $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ Es decir: $(A^t)^i = A_i$ la columna i de la matriz A transpuesta es la fila i de la matriz A, para i = 1,..,m.
OPUESTA	*La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de* A *es* -A.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

NULA	*Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por* $0_{m\times n}$	$0_{3\times 4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$
CUADRADA	*Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, m = n, diciéndose que la matriz es de* <u>*orden n*</u>. <u>Diagonal principal</u> : *son los elementos* a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} <u>Diagonal secundaria</u> : *son los elementos* a_{ij} *con* $i+j = n+1$ <u>Traza</u> de una matriz cuadrada : *es la suma de los elementos de la diagonal principal* tr A.	$A_3=\begin{pmatrix}1&9&-6\\0&2&1\\-2&4&5\end{pmatrix}$ Diagonal principal $A=\begin{pmatrix}5&1&5&-6\\1&2&0&3\\7&-3&4&11\\1&9&3&8\end{pmatrix}$ tr A = 19
SIMÉTRICA	*Es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.* $A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$	$A_3=\begin{pmatrix}1&\boxed{9}&\boxed{-6}\\\boxed{9}&2&\boxed{1}\\\boxed{-6}&\boxed{1}&5\end{pmatrix}$
ANTISIMÉTRICA	*Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.* $A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$ *Necesariamente* $a_{ii} = 0$	$A_3=\begin{pmatrix}0&9&-6\\-9&0&1\\6&-1&0\end{pmatrix}$
DIAGONAL	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal*	$A=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&5&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$
ESCALAR	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales*	$A=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

IDENTIDAD	*Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a* 1. *También se denomina matriz unidad.*	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
TRIANGULAR	*Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.*	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ T. superior $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ T. inferior
ORTOGONAL	*Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible y* $A^{-1} = A^T$ La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.	$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
NORMAL	*Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.*	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A \cdot A^T = A^T \cdot A$
REGULAR, INVERTIBLE O NO SINGULAR	*Decimos que una matriz cuadrada* A es invertible si *tiene inversa*, A^{-1}, que *verifica:* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Para establecer las reglas que rigen el cálculo con matrices se desarrolla un álgebra semejante al álgebra ordinaria, pero en lugar de operar con números lo hacemos con matrices.

- **OPERACIONES CON MATRICES**

SUMA DE MATRICES

La suma de dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{p\times q}$ *de la misma dimensión, $m = p$ y $n = q$ es otra matriz* $C = A+B$ de orden *mxn* tal que $C_i = A_i + B_i$, $i = 1,..,m$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

p.ej.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Es una ley de composición interna con las siguientes
PROPIEDADES :

· Asociativa: A+(B+C) = (A+B)+C
· Conmutativa : A+B = B+A
· Elem. neutro : (matriz cero $0_{m\times n}$) , 0+A = A+0 = A
· Elem. simétrico : (matriz opuesta -A) , A + (-A) = (-A) + A = 0

¡¡*La suma y diferencia de dos matrices NO está definida si sus dimensiones son distintas*!!

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA MATRIZ

Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden. Es decir,

$$A_{nxm} \quad \lambda A)_i = \lambda A_i \quad i = 1,\dots,n$$

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

p.ejm.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad (-5)\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 10 & -15 \\ 0 & -5 & -40 \end{pmatrix}$$

Es una ley de composición externa con las siguientes
PROPIEDADES:

1) Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

2) Distributiva I: $\lambda(A+B) = \lambda A + \mu B$

3) Distributiva II: $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda A + \mu A$

4) E. Neutro de escalares: $1\cdot A = A$

$\forall \lambda, \mu, 1 \in \mathbb{R}$; $\forall A \in M_{m\times n}$

PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{p\times q}$ *donde* $n = p$*, es decir, el número de columnas de la primera matriz* A *es igual al número de filas de la matriz* B*, se define el producto* A·B *de la siguiente forma:*

El elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto se obtiene como el producto escalar del vector fila i de la matriz A por el vector columna j de la matriz B.
$A.B)_{ij} = A_i.B^j$. Cada elemento de la matriz producto es una sumatoria de productos.
Aunque parezca extraño, esta operación aparece en muchísimas situaciones, por ejemplo:

Supongamos que un fabricante tiene pedidos para 5 casas estilo rústico, 7 estilo moderno y 12 estilo colonial. Sus pedidos pueden representarse por el vector fila $Q = (5 \quad 7 \quad 12)$. Además, supongamos que las "materias primas" que se utilizan en cada tipo de casa son acero, madera, vidrio, ladrillos y mano de obra, requeridas por cada unidad de casa según la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{acero} & \text{madera} & \text{vidrio} & \text{ladrillos} & \text{m. obra} \end{array} \\
R = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

siendo la fila 1 los requerimientos de la casa estilo rústico, la fila 2 los de la casa estilo moderno y la 3, los de la de estilo colonial.

Si el contratista desea conocer la cantidad de cada materia prima necesaria para satisfacer todos sus pedidos, tal información viene dada por Q.R

$$Q.R = (5 \quad 7 \quad 12).\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} = (146 \quad 526 \quad 260 \quad 158 \quad 388)$$

Supongamos que conocemos el costo unitario de las materias primas: el acero cuesta \$1500 por unidad, la madera \$800 por unidad, y vidrio, ladrillos y mano de obra cuestan

$500, $100 y $1000 por unidad respectivamente. Estos datos pueden expresarse en un vector columna C

$$C = \begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Entonces, el costo de cada tipo de casa es:

$$R.C = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix}$$

Y el costo para satisfacer todos los pedidos será:

$$Q.(RC) = (5 \quad 7 \quad 12).\begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix} = (1173600)$$

Compruebe que llega al mismo resultado operando de esta manera: (Q.R).C. Y también, operando con las matrices transpuestas: $C^t.(Q.R)^t = C^t.R^t.Q^t$

Veamos otro ejemplo de multiplicación de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -5 & 4 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A.B = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \quad B.A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -10 & 4 & 22 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo observamos que el producto de matrices es **no conmutativo**. Es más, puede suceder que el producto A.B esté definido y que B.A no lo esté.

PROPIEDADES:

1) *Asociativa* $A.(B.C) = (A.B).C$

2) *DistributivaI* $(A+B).C = A.C + B.C$

DistributivaII $A.(B+C) = A.B + A.C$

3) *Extractiva* $A.(\lambda B) = (\lambda A).B = \lambda A.B$