Polinomios de Taylor

1. Considerar la función $f(x) = \ln(x+1)$. Encontrar un polinomio $P(x)$ de grado 3 tal que $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$ y $P'''(0) = f'''(0)$.

2. Calcular el polinomio de Taylor de las siguientes funciones, hasta el orden n indicado alrededor de x_0:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $n = 5$, $x_0 = 0$.

   b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $n = 4$, $x_0 = 0$.

   c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $n = 5$, $x_0 = 0$.

   d) $f(x) = \ln x$, $n = 4$, $x_0 = 1$.

   e) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$m $x_0 = 4$.

   f) $f(x) = e^x$, $n = 10$, $x_0 = 0$.

   g) $f(x) = (1+x)^6$, $n = 6$, $x_0 = 0$.

3. Mostrar que el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = e^x$ es

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

4. Si el polinomio de Taylor de f de grado 5 en $x = 2$ es

$$P(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 8$$

   a) Calcular $f^{(4)}(2)$ y $f^{(3)}(2)$.

   b) ¿Se puede deducir $f^{(6)}(2)$?

   c) ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio es de grado 7?

5. Trazar las gráficas de los polinomios de Taylor $T_3[\operatorname{sen} x] = x - \dfrac{x^3}{3!}$ y $T_5[\operatorname{sen} x] = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$. Poner especial atención en los puntos en los que las curvas cortan al eje x. Comparar estas gráficas con la de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

6. Hacer lo mismo que en el ejercicio 5 para los polinomios de Taylor $T_2[\cos x]$, $T_4[\cos x]$ y $f(x) = \cos x$.

7. Obtener los polinomios de Taylor que se indican. Los teoremas vistos en clase ayudarán para simplificar los cálculos en varios casos:

   a) $T_n[a^x] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k$

   b) $T_n\left[\dfrac{1}{1+x}\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k$

   c) $T_{2n+1}\left[\dfrac{x}{1-x^2}\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$.

   d) $T_n[\log(1+x)] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$.

   e) $T_{2n+1}\left[\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

   f) $T_n\left[\dfrac{1}{2-x}\right] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^{k+1}}$.

   g) $T_n[(1+x)^\alpha] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$,
   donde $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$.

   h) $T_{2n}\left[\operatorname{sen}^2 x\right] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$.
   Ayuda: $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.