Polinomios

1. Determinar el cociente y el resto.

   a) $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x+2}$
   b) $\dfrac{3x^3-12x^2-9x+1}{x-5}$
   c) $\dfrac{x^3-8x+2}{x+3}$
   d) $\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+2}{x-2}$
   e) $\dfrac{x^5+3x^3-6}{x-1}$
   f) $\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{x-3}$
   g) $\dfrac{x^3+6x+3}{x^2-2x+2}$
   h) $\dfrac{3x^4-5x^3-20x-5}{x^2+x+3}$
   i) $\dfrac{6x^3+2x^2+22x}{2x^2+5}$
   j) $\dfrac{9x^2-x+5}{3x^2-7x}$
   k) $\dfrac{2x^3+3x^2-2x+1}{x-\frac{1}{2}}$

2. Usar la división sintética y el teorema del resto para evaluar $P(c)$.

   a) $P(x)=4x^2+12x+5, \quad c=-1$
   b) $P(x)=x^3+3x^2-7x+6, \quad c=2$
   c) $P(x)=2x^3-21x^2+9x-200, \quad c=11$
   d) $P(x)=5x^4+30x^3-40x^2+36x+14, \quad c=7$
   e) $P(x)=6x^5+10x^3+x+1, \quad c=-2$
   f) $P(x)=3x^3+4x^2-2x+1, \quad c=2/3$

3. Demostrar que los siguientes polinomios no tienen raíces racionales.

   a) x^3-x-2
   b) $2x^4-x^3+x+2$

4. Determinar todas las raíces de los polinomios.

   a) x^2+16
   b) x^2+2x+2
   c) $2x^2+25$
   d) x^2-x+1
   e) x^2+4x+8
   f) $2x^2+2x+1$
   g) $3x^2-5x+4$
   h) $2x^2-3x+2$
   i) x^3+2x^2+4x+8
   j) $x^3-7x^2+17x-15$
   k) x^3-2x^2+2x-1
   l) $x^3+7x^2+18x+18$
   m) $2x^3-8x^2+9x-9$
   n) $x^4+x^3+7x^2+9x-18$
   ñ) $x^5+x^3+8x^2+8$

5. Obtener un polinomio con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

   a) Grado 3 y raíces 2 e i.
   b) Grado 3 y raíces -3 y $1+i$.
   c) Grado 4 y raíces $1-2i$ y 1 con multiplicidad 2.
   d) Grado 4 y raíces $2i$ y $3i$.
   e) Grado 4 y raíces i y $1+i$ y un coeficiente constante 12.
   f) Grado 5 y raíces $\frac{1}{2}$,-1 (con multiplicidad 2) y $-i$, y coeficiente principal 4.

6. Factorizar los siguientes polinomios.

   a) x^6+7x^3-8
   b) x^5+3x^3+2x
   c) $\frac{1}{3}x^3+2x^2+\frac{2}{3}x-7$
   d) $x^4-\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{4}$
   e) $x^4-x^3-9x^2-x-10$, sabiendo que i es raíz
   f) $x^5-25x^3+85x^2-106x+45$, sabiendo que $(2+i)$ es raíz
   g) $x^6-2x^4-51x^2-108$, sabiendo que $(-\sqrt{3}i)$

es raíz

h) $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x - 2$, sabiendo que $(1+i)$ es raíz

7. *a*) Mostrar que $2i$ y $1-i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1+i)x + (2+2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados no lo son.

b) Explicar por qué ésto no viola el teorema de las raíces conjugadas.

8. *a*) Determinar el polinomio con coeficientes *reales*, de grado mínimo, para el cual i y $1+i$ sean raíces y el coeficiente principal sea 1.

b) Determinar el polinomio con coeficientes *complejos*, de grado mínimo, para el cual i y $1+i$ sean raíces y el coeficiente principal sea 1.

c) Determinar el polinomio P con coeficientes *reales*, de grado mínimo, que tenga a $1/2$ como raíz simple, a $(1+i)$ como raíz doble, tal que $P(0) = -2$.

d) Determinar todos los polinomios P con coeficientes *enteros*, de grado 3, que tengan a -2 como raíz doble, tal que $P(1) = P(-1)$.

e) Determinar el polinomio P de coeficientes *reales*, de grado mínimo, tal que $P(1+i) = 0$, -1 es raíz doble de P y $\mathrm{Im}(P(i)) = 28$

f) Determinar un polinomio P de coeficientes *reales*, de grado mínimo, tal que las soluciones de $z^2 = 5\overline{z}$ son raíces de P, $P(1) = 31$ y P tiene al menos una raíz doble.

g) Determinar todos los polinomios P de coeficientes *reales* de grado 4 y coeficiente principal 6, tal que $-1-i$ es raíz, $P(0) = 192$ y el cociente entre dos de sus raíces reales es 4.

9. *a*) Hallar el resto de dividir P por $(x-3)(x+2)$ si $P(3) = 1$ y $P(-2) = 3$.

b) Hallar el resto de dividir P por $(x+2)(x-3)(x+1)$, sabiendo que los restos de dividir P por $x+2$, $x-3$ y $x+1$ son 3, 7 y 13 respectivamente.

10. Encontrar todas las raíces de $P(x) = 9x^4 + 27x^3 - 8x^2 + 3x - 1$, sabiendo que tiene alguna raíz común con $Q(x) = 81x^4 - 1$.

11. Encontrar todas las raíces de $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 - 12x - 8$, sabiendo que tiene alguna raíz imaginaria pura.

12. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ y sean a, b y c sus raíces. Calcular $a+b+c$, abc, $a^2+b^2+c^2$ y $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

13. *a*) Sea $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + \alpha$. Encontrar $\alpha \in \mathbf{R}$ para que la suma de dos de las raíces de P sea igual a -1.

b) Sea $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + \alpha$. Encontrar $\alpha \in \mathbf{R}$ de manera que una de las raíces de P sea igual a la opuesta de otra.

c) Sea $P(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + \alpha$. Encontrar $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que una de las raíces de P sea igual a la suma de las otras dos.